

# Vorlesung 5a

## Zufallsvariable mit Dichten:

Transformationen, Exponentialverteilung,  
Normalverteilung

### Teil 4

Die Standardnormalverteilung auf  $\mathbb{R}$

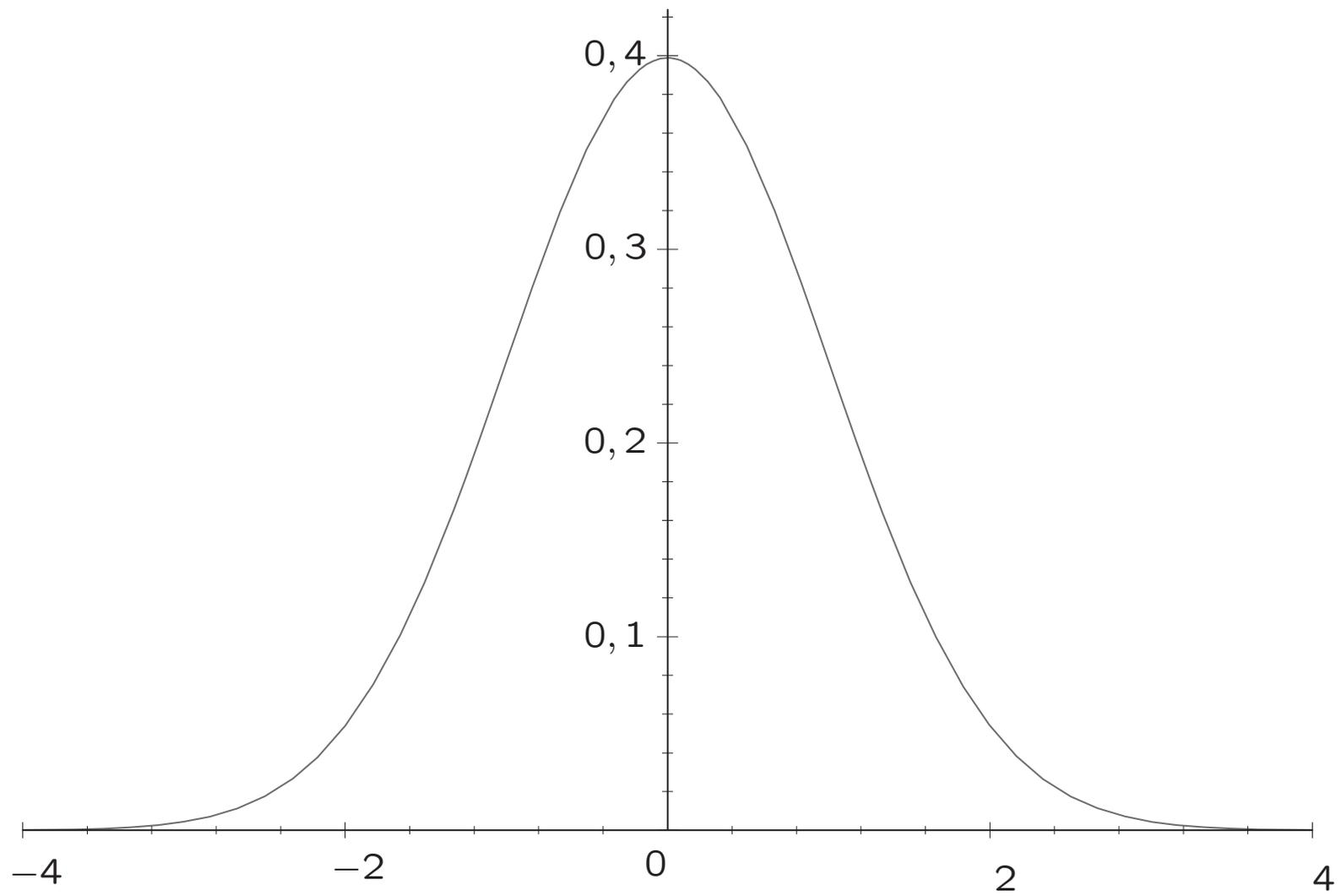
Die folgende Definition beinhaltet  
die wichtigste Verteilung der Stochastik:  
Eine  $\mathbb{R}$ -wertige Zufallsvariable  $Z$  mit Dichte

$$\varphi(a) da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} da$$

heißt **standard-normalverteilt**.

Wir werden bald auf geometrischem Wege sehen, dass gilt  
(vgl. die erste Aufgabe auf S. 72 im Buch):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2/2} da = \sqrt{2\pi}, \quad \text{also} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(a) da = 1.$$



Für ein standard-normalverteiltes  $Z$  ist

$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{E}[Z^2] = 1.$$

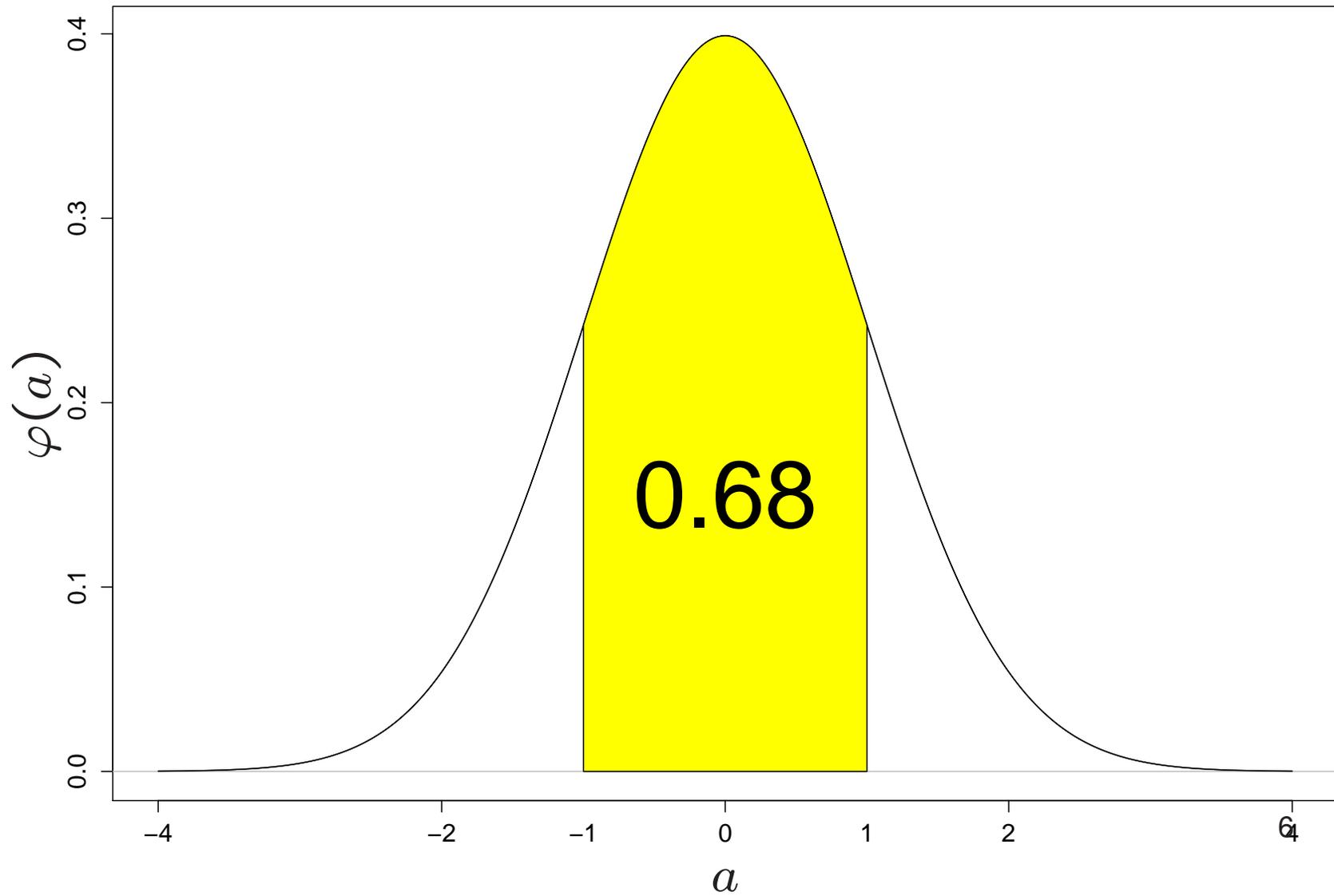
Denn aus Symmetriegründen ist  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-a^2/2} da = 0$ ,

und mit partieller Integration bekommt man

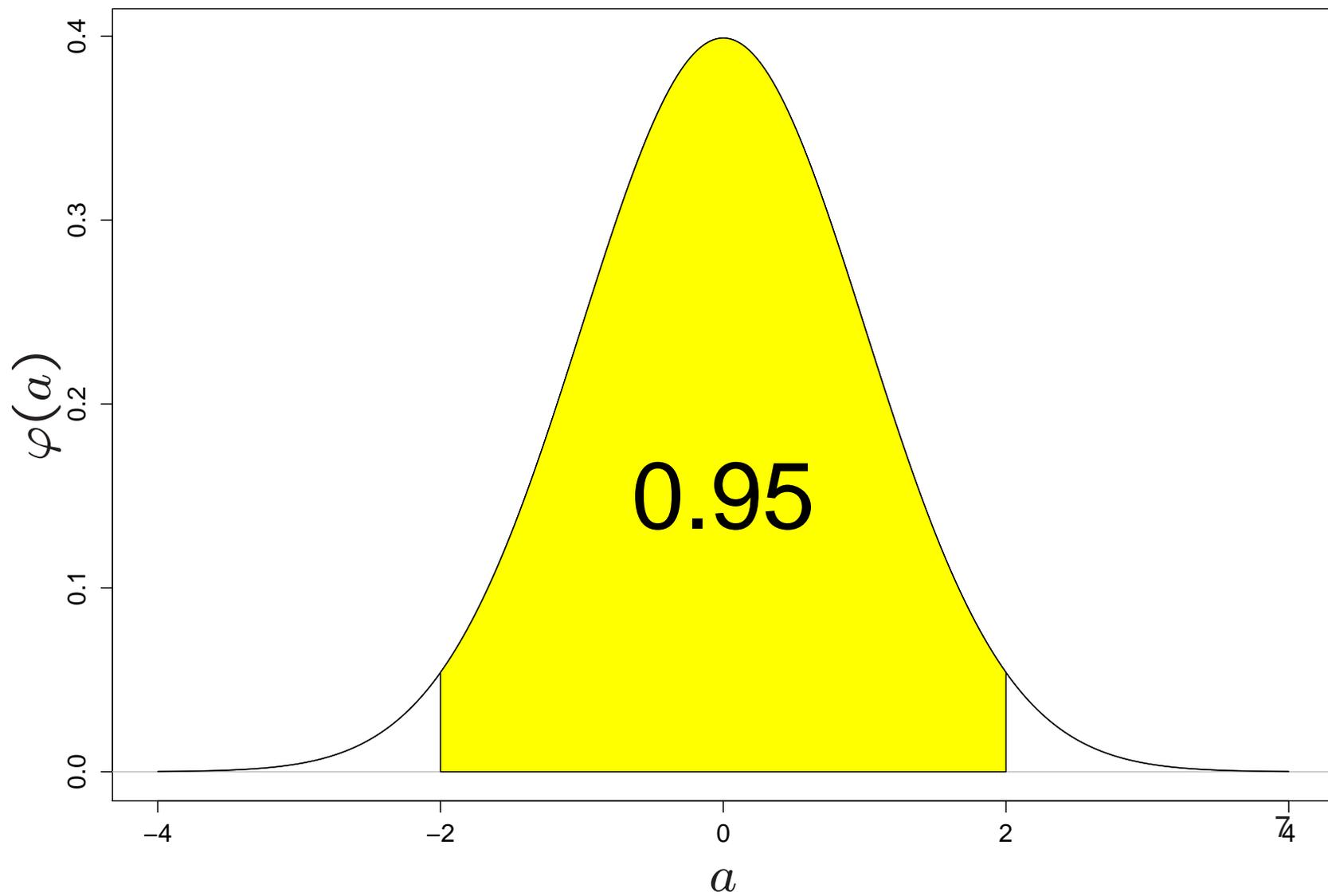
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} a^2 e^{-a^2/2} da &= \int_{-\infty}^{\infty} a a e^{-a^2/2} da \\ &= -a e^{-a^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2/2} da = 0 + \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Zwei für die Praxis wichtige Zahlen:

$$\mathbf{P}(|Z| < 1) \approx 0.68$$



$$P(|Z| < 2) \approx 0.95$$



$$\Phi(b) := \int_{-\infty}^b \varphi(a) da$$

ist die Standard-Normalverteilungsfunktion.

Es gibt für sie keinen expliziten analytischen Ausdruck  
(der ohne die Formulierung als Integral bzw. Stammfunktion auskommt).

Der R-Befehl dafür ist `pnorm(b)` .

## Affin lineare Transformation einer standard-normalverteilten ZV'e

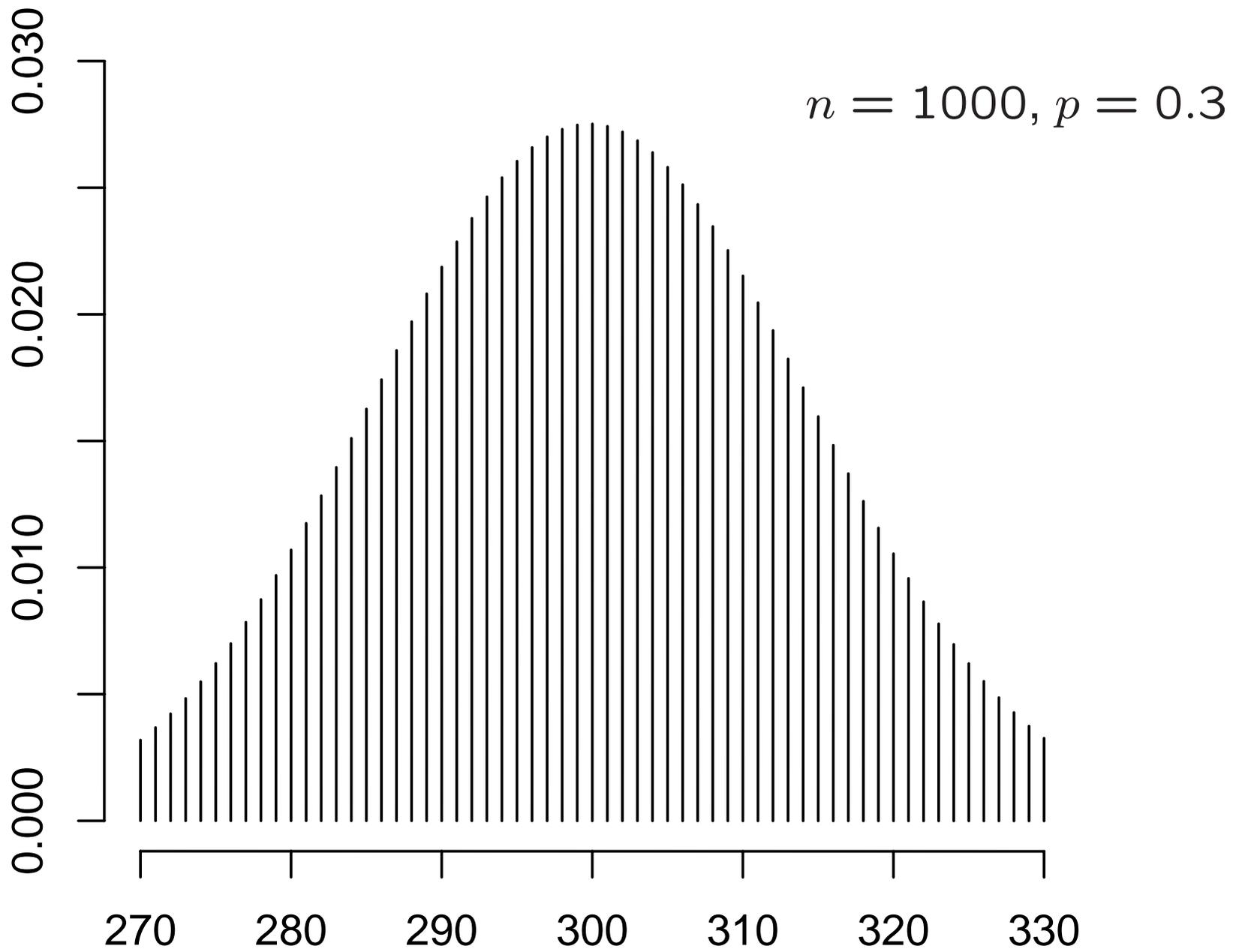
Sei  $Z$  standard-normalverteilt,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ . Dann hat

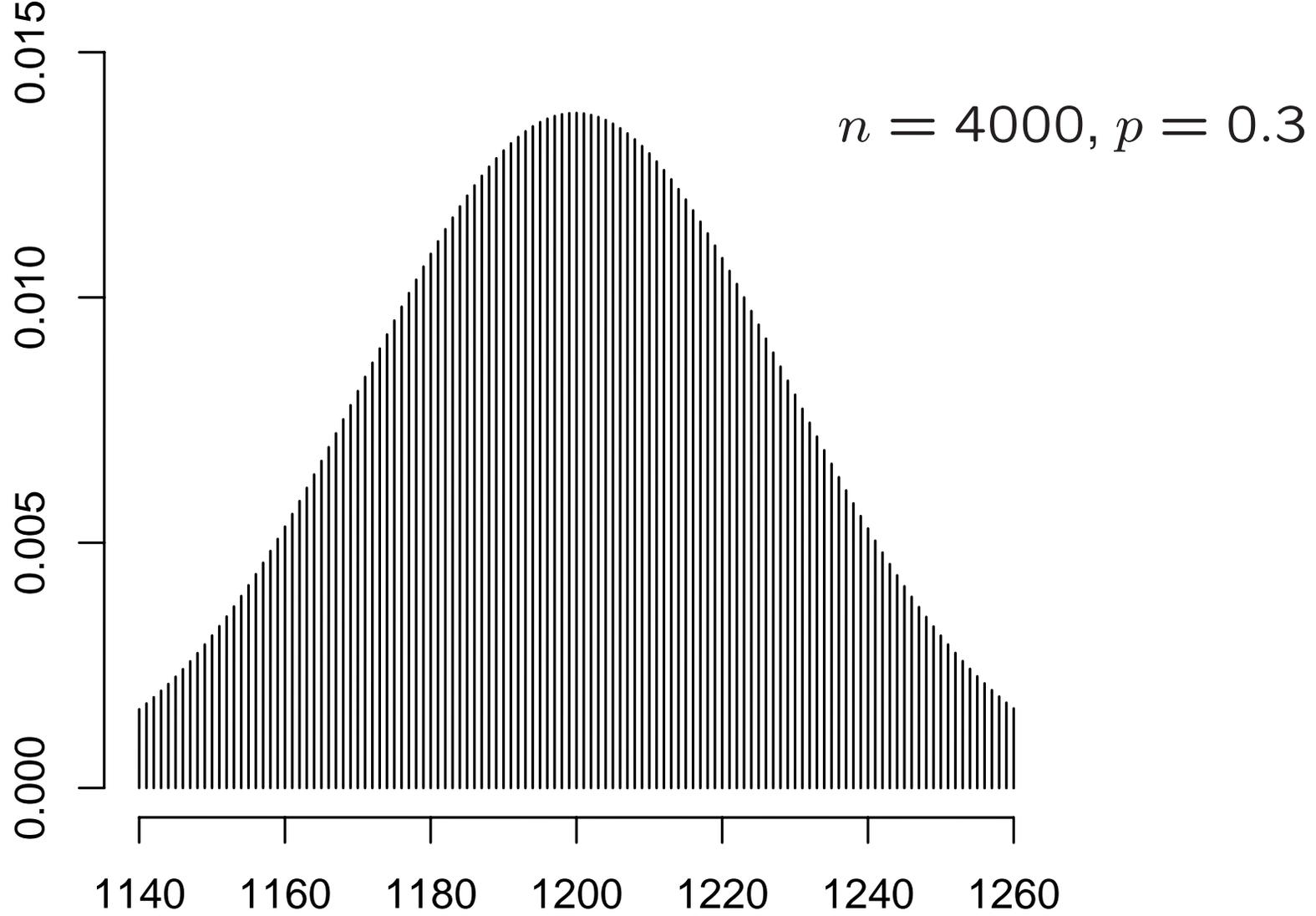
$$X := \sigma Z + \mu :$$

die Dichte

$$\frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) da = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a - \mu)^2}{2\sigma^2}} da .$$

Die Gaußsche Glockenkurve sieht man auch entstehen aus den Binomialgewichten mit großem  $n$  und großem  $npq$ , wenn man sie “geeignet ins Bild bringt”:





Mehr dazu bald in der Vorlesung!